Ловягин Ю. Н. Ловягин Н. Ю.

Сборник задач

по МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

для студентов

прикладных математических специальностей

Санкт-Петербург, 2019

1. Формализовать следующие высказывания, выделив атомарные.

   (а) Если в строительстве внедряются современные методы планирования и руководства, то стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться.

   (б) Если “Спартак” или “Динамо” проиграют, а “Торпедо” выиграет, то “Зенит” потеряет первое место, а я, кроме того, проиграю пари.

   (в) “Зенит” станет чемпионом тогда и только тогда, когда будет в каждом матче играть по-настоящему, а арбитры будут судить честно, или все матчи будут куплены.

   (г) Если в июне мы успешно сдадим экзамены, то, если июль будет погожим, мы поедем на море, или, если будут дожди, то останемся дома и будем смотреть телевизор.

   (д) Или Иванов лучший шахматист школы, или Петров не участвовал в соревнованиях, а Сидоров ему поддался.

   (е) Кактусы не следует обильно поливать или их корни загниют, а листья отомрут и растение погибнет.

   (ж) Если долго держаться за раскалённый конец кочерги, то рано или поздно почувствуешь боль, а если выпить из пузырька с ядом, то рано или поздно почувствуешь недомогание.

   (з) Если строить противоатомные убежища, то народ получит ложное впечатление безопасности, а правительственные расходы возрастут, и другие страны будут чувствовать себя незащищёнными и могут начать превентивную войну.

   (и) Если к стандартному набору шахматных фигур добавить Каиссу, то ферзь станет сильнейшей фигурой в том и только том случае, если Каисса будет снята с доски или заперта.

   (й) Если брадобрей бреет тех и только тех, кто не бреется сам, то или он сумасшедший, или в логике есть противоречие.

   (к) Если некто понимает логику и не понимает в живописи, то кто-то не понимает в музыке или в балете.

   (л) Для того, чтобы сделать карьеру, необходимо и достаточно быть глупее начальника, выполнять самые абсурдные требования или по-настоящему быть гениальным.

   (м) Лондон — столица Парижа, Париж — столица Рима, Рим — столица империи.

2. Составить высказывания естественного языка, формализуемые следующими формулами:

   (а) $(A \supset B \,\&\, C) \vee (\neg A \supset D \vee (\neg D \supset E))$;

   (б) $\neg A \,\&\, \neg B \supset C \,\&\, (D \vee E \supset F \,\&\, G)$;

   (в) $A \equiv B \,\&\, (C \vee D)$;

   (г) $\neg A \supset (B \equiv C \,\&\, D \vee E)$;

   (д) $A \supset B \vee (C \supset (\neg B \equiv D))$.

3. Придумать высказывания, формализуемые теми же формулами, что и высказывания из задачи 1.

4. Построить таблицу истинности для высказываний из задачи 1.

5. Составить таблицы истинности для следующих формул:

   (а) $A \vee B \vee \neg C \vee A \,\&\, \neg B \,\&\, C \,\&\, (C \supset A)$;

   (б) $(A \supset B) \,\&\, C \,\&\, \neg B \vee \neg A \vee B \vee \neg C$;

(в) $(A \mathbin{\&} B \vee C \vee \neg B \mathbin{\&} A) \mathbin{\&} (A \supset B \vee C \vee A \mathbin{\&} B)$;
(г) $(C \supset A \mathbin{\&} \neg C \vee A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} (A \mathbin{\&} \neg C \vee (\neg A \vee \neg B) \mathbin{\&} C)$;
(д) $\neg C \supset (A \vee B) \supset A \mathbin{\&} (\neg B \vee C \supset \neg A)$;
(е) $A \supset \neg B \mathbin{\&} C \supset B \supset A \mathbin{\&} (B \supset C)$;
(ж) $A \vee B \supset \neg C \mathbin{\&} A \supset \neg (A \mathbin{\&} B \supset C)$;
(з) $A \mathbin{\&} B \supset \neg C \supset (C \supset \neg B) \supset A$;
(и) $C \mathbin{\&} (A \vee \neg B) \vee \neg C \mathbin{\&} A \vee (C \equiv \neg B)$;
(й) $(A \supset B \vee C) \mathbin{\&} \neg A \equiv C \supset A$;
(к) $A \supset \neg (B \vee A \equiv C) \mathbin{\&} (A \equiv B \supset C)$;
(л) $(A \vee B \equiv \neg C) \mathbin{\&} (A \supset B) \mathbin{\&} (A \equiv \neg C \vee \neg B)$;
(м) $A \supset ((B \equiv C) \supset (A \mathbin{\&} B \equiv A \mathbin{\&} C))$.

6. Выяснить, при каких значениях истинностных оценок атомарных высказываний, составляющих формулу, следующие составные высказывания ложны:

(а) $C \supset B \vee (C \equiv B \mathbin{\&} \neg A)$.
(б) $A \mathbin{\&} (B \vee \neg C) \mathbin{\&} (C \supset B) \supset C$;
(в) $\neg (A \mathbin{\&} \neg B) \mathbin{\&} (A \vee C) \supset A \vee B$;
(г) $(B \vee (C \supset A)) \mathbin{\&} \neg B \supset A \mathbin{\&} \neg C$;
(д) $A \supset B \mathbin{\&} C \supset (\neg A \supset \neg B) \supset \neg B$;
(е) $A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} C \vee B \mathbin{\&} C \vee U \mathbin{\&} V \vee U \mathbin{\&} W \vee V \mathbin{\&} W \vee \neg A \mathbin{\&} \neg U$;
(ж) $A \vee B \vee C \supset (A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C)$;
(з) $(A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C) \mathbin{\&} (C \vee A) \supset A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} C$;
(и) $A \vee B \supset \neg A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} \neg B$;
(й) $(B \supset A \mathbin{\&} C) \mathbin{\&} \neg (A \vee C \supset B)$;
(к) $A \supset (B \supset C) \supset (A \supset B \supset (A \supset C))$.

Формализованный язык исчисления высказываний (пропозициональный язык) состоит из (пропозициональных) формул, которые строятся по схеме:
формула:: Переменная | (¬формула) | (формула логическая связка формула).

Здесь под логической связкой понимается один из знаков: $\&, \vee, \supset, \equiv$. При этом действует правило приоритета логических связок для опускания скобок — связки большего приоритете необязательно заключать в скобки. Приоритет связок убывает от $\neg$ к $\equiv$. Из подряд идущих связок одного приоритета более сильной считается более левая. Допускается наряду с переменными использовать в построении формул в качестве атомов логические константы. Наиболее важные константы — истина (*И*) и ложь (*Л*).

7. Проверить, являются ли нижеприведенные слова формулами:

(а) $x \mathbin{\&} y \vee z$;
(б) $x \supset (y \equiv (z \vee y))$;
(в) $(x \vee y$;
(г) $(x \vee (x\supset) \mathbin{\&} (z \equiv \neg y))$;
(д) $(x \supset (y \equiv (z \vee y)))$;
(е) $(\&y \vee (y \mathbin{\&} (\neg y \supset x)))$;

(ж) $((x \vee (\neg (z \mathbin{\&} (\neg y)) \supset \neg x)))$;
(з) $((\neg (x \vee (y)) \vee (z \supset y)) \mathbin{\&} (\neg z))$;
(и) $x \mathbin{\&} \neg (y \equiv z)$;
(й) $(x \mathbin{\&} y \vee (z \mathbin{\&} y))$;
(к) $(x \supset ((\neg x) \vee z))$;
(л) $\neg (x \mathbin{\&} (z \vee y))$;
(м) $(\neg (z \supset ((\neg z) \vee y)))$.

8. Определить, сколькими способами можно расставить скобки в приведённых ниже словах так, чтобы получилась пропозициональная формула и найти все подформулы получающихся формул:

(а) $x \supset \neg y \vee y \mathbin{\&} z$;
(б) $x \supset y \supset z \supset \neg x \supset \neg y$;
(в) $x \mathbin{\&} y \supset z \vee x \equiv z \vee y$.

9. Сократить максимальное количество скобок в формулах:

(а) $(\neg (z \supset ((\neg z) \vee y)))$;
(б) $((x \vee ((\neg y) \supset z)) \mathbin{\&} (z \mathbin{\&} (\neg y)))$;
(в) $((x \mathbin{\&} ((\neg z) \vee (\neg y))) \mathbin{\&} y)$;
(г) $((x \supset y) \supset ((\neg z) \supset (x \mathbin{\&} y)))$;
(д) $(((\neg y) \vee (\neg (x \supset (z \mathbin{\&} y)))) \vee (y \vee z))$;
(е) $((x \vee (\neg y)) \vee ((z \supset (x \mathbin{\&} y)) \vee (y \vee (\neg z))))$;
(ж) $((\neg ((\neg x) \vee y)) \supset (z \mathbin{\&} (\neg x)))$;
(з) $((((x \mathbin{\&} y) \vee (\neg z)) \supset (\neg x)) \vee (x \supset ((\neg z) \vee y)))$;
(и) $(((x \vee ((\neg y) \supset x)) \supset ((\neg z) \mathbin{\&} y)))$;
(й) $((x \supset (y \vee (\neg x))) \supset (z \mathbin{\&} (\neg y)))$;
(к) $(x \supset ((y \vee (\neg x)) \supset (z \mathbin{\&} (\neg y))))$;
(л) $(((x \supset (\neg y)) \supset z) \supset ((x \vee (\neg z)) \supset y))$.

10. Восстановить все скобки в формулах:

(а) $(x \supset \neg y \vee z) \mathbin{\&} z \vee y \supset x$;
(б) $x \supset \neg y \supset x \vee y \mathbin{\&} \neg z$;
(в) $\neg (x \mathbin{\&} \neg y) \vee z \supset x \vee y$;
(г) $x \supset \neg y \supset z \supset \neg x \supset \neg z \vee y$;
(д) $(x \vee \neg y \vee z) \mathbin{\&} x \supset \neg y \vee z$;
(е) $x \mathbin{\&} \neg y \supset x \mathbin{\&} \neg z \supset y \mathbin{\&} \neg x$;
(ж) $x \mathbin{\&} \neg y \vee z \vee \vee \neg x \mathbin{\&} \neg z$;
(з) $(x \supset \neg y) \vee z \supset x \mathbin{\&} \neg z$;
(и) $(x \vee \neg y \supset z) \mathbin{\&} z \supset \neg y$;
(й) $\neg x \mathbin{\&} y \;\; z \vee x \mathbin{\&} y \neg z$;
(к) $x \supset \neg y \mathbin{\&} \neg z$;

(л) $x \mathbin{\&} (y \vee z) \supset x \supset y \mathbin{\&} x \vee z$;
(м) $x \vee (y \supset z) \vee (z \supset y)) \mathbin{\&} \neg x$.

11. Выписать все подформулы формул:

(а) $x \supset y \supset (x \supset \neg y \supset \neg y)$;
(б) $x \vee (z \equiv x \mathbin{\&} (z \vee y \supset \neg x))$;
(в) $x \supset z \supset (y \supset z \supset (x \vee y \supset \neg z))$.

12. Доказать, что если пропозициональная формула (в полной скобочной записи) построена только с помощью логических констант и хотя бы одной логической связки, то в ней есть хотя бы одно вхождение слова вида либо (ξ *БЛС* ζ), либо $(\neg\xi)$, где ξ, ζ — логические константы, *БЛС* — бинарная логическая связка.

Пусть A — некоторая формула, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — список без повторений всех переменных, входящих в A. Пусть, далее, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — набор логических констант. Заменим все вхождения переменных x_i в A на вхождения δ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Вычислим полученное выражение согласно таблицам истинности для логических связок. Полученное значение (логическую константу) называют валентностью (истинностным значением) формулы A на наборе $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ и обозначают $\mathop{\mathbf{val}}\limits_{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_n} A$. Переменная x_l называется фиктивной (несущественной) для формулы A, если для любого набора $\delta_1, \ldots, \delta_{l-1}, \delta_{l+1}, \ldots, \delta_n$

$$\mathop{\mathbf{val}}\limits_{\delta_1,\ldots,\delta_{l-1},\text{И},\delta_{l+1},\ldots,\delta_n} A = \mathop{\mathbf{val}}\limits_{\delta_1,\ldots,\delta_{l-1},\text{Л},\delta_{l+1},\ldots,\delta_n} A.$$

Ясно, что от фиктивной переменной валентность формулы не зависит. Напротив существенная переменная вносит свой вклад, ибо для некоторого набора $\delta_1, \ldots, \delta_{l-1}, \delta_{l+1}, \ldots, \delta_n$

$$\mathop{\mathbf{val}}\limits_{\delta_1,\ldots,\delta_{l-1},\text{И},\delta_{l+1},\ldots,\delta_n} A \neq \mathop{\mathbf{val}}\limits_{\delta_1,\ldots,\delta_{l-1},\text{Л},\delta_{l+1},\ldots,\delta_n} A.$$

13. Найти все существенные переменные следующих формул:

(а) $(x \vee y \mathbin{\&} \neg z) \mathbin{\&} (x \supset y) \mathbin{\&} (x \mathbin{\&} \neg z \vee \neg x)$;
(б) $x \vee y \vee z \mathbin{\&} \neg x \mathbin{\&} (x \vee z \vee x \mathbin{\&} y)$;
(в) $x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} (z \vee \neg x) \vee x \mathbin{\&} z$;
(г) $(x \vee (y \supset z)) \mathbin{\&} (y \supset z) \mathbin{\&} (x \vee y \vee z)$;
(д) $(((\neg x \supset z) \mathbin{\&} (y \supset z)) \vee y) \mathbin{\&} (x \vee (y \supset z))$;
(е) $x \mathbin{\&} y \vee \neg z \vee (\neg x \supset z) \mathbin{\&} (x \supset z) \mathbin{\&} (x \supset \neg z)$;
(ж) $x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} z \vee x \mathbin{\&} \neg y \mathbin{\&} z \vee y \mathbin{\&} z \vee x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \neg z \vee x \mathbin{\&} \neg y \mathbin{\&} \neg z$;
(з) $z \mathbin{\&} (x \vee \neg y) \vee \neg z \mathbin{\&} x \vee (y \supset z)$;
(и) $x \vee y \vee \neg z \vee x \mathbin{\&} \neg y \mathbin{\&} z \mathbin{\&} (x \vee \neg z)$;
(й) $(\neg y \supset \neg x) \mathbin{\&} z \mathbin{\&} \neg y \vee \neg x \vee y \vee \neg z$;
(к) $(x \mathbin{\&} y \vee z \vee \neg y \mathbin{\&} x) \mathbin{\&} (x \mathbin{\&} y \vee \neg x \vee y \vee z)$;

(л) $(x \mathbin{\&} \neg z \vee x \mathbin{\&} y \neg z) \mathbin{\&} (x \mathbin{\&} \neg z \vee (\neg x \vee \neg y) \mathbin{\&} z)$.

Если все переменные какой-либо формулы являются фиктивными, то формула на любом наборе принимает значение либо *И*, либо *Л*. В первом случае говорят, что формула является тавтологией, во втором — противоречием. Если A — тавтология, то пишут $\models A$.

Пусть A и B — некоторые формулы. Говорят, что A логически влечет B, или B является логическим следствием A и пишут $A \Longrightarrow B$, если $\models A \supset B$. Если $A \Longrightarrow B$ и $B \Longrightarrow A$, то формулы объявляются логически эквивалентны или равнозначными, что обозначается $A \sim B$. Формула равнозначная тавтологии сама является, очевидно тавтологией. Если считать, что универсальной тавтологией является логическая константа *И*, то ясно, что всякая тавтология равнозначна *И*. Таким образом, записи $\models A$ и $A \sim И$ равносильны. Для противоречия получаем привлекательное обозначение: $A \sim Л$.

Если $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — список высказываний (формул), которые считают принятыми в данном контексте, то такой список называется списком гипотез, а сами высказывания гипотезами. Формула (высказывание) A называется следствием гипотез $A_1, A_2, \ldots, A_m$, если $A_1 \mathbin{\&} A_2 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_m \Longrightarrow A$. В этом случае пишут $A_1, A_2, \ldots, A_m \Longrightarrow A$. Система гипотез $A_1, A_2, \ldots, A_m$ называется противоречивой, если $A_1 \mathbin{\&} A_2 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} A_m \sim Л$.

14. Показать, что если формула $\not\models A$, то $\models \neg A$ и, наоборот, если $\models B$, то $\not\models \neg B$.

15. Показать, что если $A \sim B$, то $\models A \equiv B$ и наоборот.

16. Какие из приведенных формул являются выполнимыми, опровержимыми, тождественно истинными или тождественно ложными:

(а) $x \supset y \supset (y \supset z \supset (x \supset z))$;
(б) $\neg (x \mathbin{\&} y \supset x) \vee x \mathbin{\&} (y \vee z)$;
(в) $x \supset y \supset (z \supset \neg x \supset (\neg y \supset \neg z))$;
(г) $(x \vee \neg \supset z \mathbin{\&} \neg x) \mathbin{\&} (x \vee (y \supset \neg z))$;
(д) $x \supset y \supset (z \supset \neg x) \supset (\neg y \supset \neg z)$;
(е) $(y \supset z) \mathbin{\&} (x \vee y) \mathbin{\&} (z \supset \neg x)$;
(ж) $\neg x \supset \neg y \supset (y \mathbin{\&} z \supset x \mathbin{\&} z)$;
(з) $x \supset y \supset (x \supset (y \supset z) \supset (x \supset z))$;
(и) $(x \supset y \vee z) \mathbin{\&} (y \supset v) \mathbin{\&} (y \mathbin{\&} x \supset \neg z)$.

17. Проверить, являются ли данные формулы равнозначными:

(а) $A \vee B$ и $\neg (\neg A \mathbin{\&} \neg B)$;
(б) $A \vee B$ и $A \supset \neg B$;
(в) $A \mathbin{\&} \neg B$ и $\neg (A \supset B)$;
(г) $(A \vee B) \mathbin{\&} (A \vee C) \mathbin{\&} (B \vee D) \mathbin{\&} (C \vee D)$ и $A \mathbin{\&} D \vee B \mathbin{\&} C$;
(д) $A \mathbin{\&} (A \vee C) \mathbin{\&} (B \vee C)$ и $A \mathbin{\&} B \vee A \mathbin{\&} C$;
(е) $A \mathbin{\&} (\neg B \vee \neg C) \mathbin{\&} (A \supset B) \mathbin{\&} (A \supset C)$ и $A \vee B \mathbin{\&} \neg C$;
(ж) $(A \supset B) \mathbin{\&} (B \supset C) \supset (A \supset B \mathbin{\&} C)$ и $(A \mathbin{\&} (B \vee \neg C))$.

18. Выяснить, является ли заключение логическим следствием посылок, то есть является ли приведенное рассуждение логически безупречным.

(а) Если в строительстве внедряются современные методы планирования и руководства, то стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться. В строительстве уже внедряются современные методы планирования и руководства. Следовательно, стройки будут расти быстрее, а стоимость строительства будет снижаться.

(б) Контракт будет выполнен тогда и только тогда, когда дом будет сдан в эксплуатацию. Если дом будет сдан в декабре, то в январе можно переезжать в новые квартиры. Если в январе квартиросъемщики не переезжают, то они не оплачивают квартирную плату. Даже если контракт не выполнен, то квартиросъемщики должны внести квартирную плату. Следовательно, квартиросъемщики внесут квартирную плату.

(в) Если строить противоатомные убежища, то другие государства будут чувствовать себя в опасности, а наш народ получит ложное представление о своей безопасности. Если другие страны будут чувствовать себя в опасности, то они смогут начать превентивную войну. Если наш народ получит ложное представление о своей безопасности, то он ослабит усилия, направленные на сохранение мира. Если же не строить противоатомные убежища, то мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны. Следовательно, другие страны смогут начать превентивную войну, и наш народ ослабит свои усилия, направленные на сохранение мира, либо мы рискуем иметь колоссальные потери в случае войны.

(г) Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжёт. Следовательно, Смит был убийцей.

(д) Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или возникнет безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не возникнет. Следовательно, правительственные расходы возрастут.

19. Выяснить, имеют ли место следующие логические следствия:

(а) $A \supset B,\ B \supset C \Rightarrow A \supset C$;

(б) $A \supset B,\ C \supset \neg A \Rightarrow \neg B \supset \neg C$;

(в) $A \supset B,\ C \supset A,\ B \supset D \Rightarrow C \supset D$;

(г) $A \supset B \vee C,\ \neg B \supset D,\ D \,\&\, A \supset \neg C \Rightarrow B \,\&\, \neg A$;

(д) $A \equiv B,\ B \supset C,\ \neg C \supset \neg D,\ \neg A \supset D \Rightarrow D$;

(е) $A \,\&\, B,\ A \,\&\, C \Rightarrow A \supset (B \supset C)$;

(ж) $A,\ A \supset B \Rightarrow A \vee C \supset B,\ \neg B \supset \neg A \vee C$;

(з) $A \supset B,\ A \,\&\, C,\ C \supset D \vee \neg A \Rightarrow D \supset B$;

(и) $A \vee B \supset C,\ D \supset A,\ B \,\&\, \neg C \supset D \Rightarrow A \supset B \,\&\, C,\ D$.

20. Выяснить, являются ли приведенные системы высказываний противоречивыми.

(а) Либо свидетель не был запуган, либо, если Генри покончил жизнь самоубийством, записка была найдена. Если свидетель был запуган, то Генри не покончил жизнь самоубийством. Если записка была найдена, то Генри покончил жизнь самоубийством.

(б) Если вечер скучен, то Алиса начинает плакать или Анатоль рассказывает смешные истории. Если Сильвестр приходит на вечер, то или вечер скучен, или Алиса начинает плакать. Если Анатоль рассказывает смешные истории, то Алиса не начинает плакать. Сильвестр приходит на вечер тогда и только тогда, когда Анатоль не рассказывает смешные истории. Если Алиса начинает плакать, то Анатоль рассказывает смешные истории.

(в) Если курс ценных бумаг растёт или процентная ставка снижается, то либо падает курс акций, либо налоги не повышаются. Курс акций понижается тогда и только тогда, когда растёт курс ценных бумаг и налоги растут. Если процентная ставка снижается, то либо курс акций не понижается, либо курс ценных бумаг не растёт. Либо повышаются налоги, либо курс акций понижается и снижается процентная ставка.

(г) $A \,\&\, B \supset C,\ C \supset D \vee B,\ C \supset E,\ \neg D \,\&\, \neg E,\ A.$

(д) $A \equiv B,\ B \supset C,\ \neg A \supset D,\ D,\ \neg C \vee D.$

(е) $(A \supset B) \,\&\, (C \supset D)\,,\ D \,\&\, B \supset E,\ \neg E,\ A \,\&\, C.$

(ж) $A \,\&\, B \supset C,\ C \,\&\, D \supset \neg E,\ \neg F \supset D \,\&\, E,\ \neg A \vee \neg B \vee F.$

21. Доказать, что формула A является тавтологией тогда и только тогда, когда $A \sim И$.

22. Доказать, что A является противоречием тогда и только тогда, когда $A \sim Л$.

23. Доказать, что $A \sim B$ тогда и только тогда, когда $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$.

Интерпретацией называется функция, заданная на множестве всех переменных и принимающая значение в $\{И, Л\}$. М ы определим для каждой формулы A и интерпретации s $\mathbf{val}_s A$ рекурсией по строению формулы A:

1. если A есть переменная x, то $\mathbf{val}_s A := s\,(x)$;
2. $\mathbf{val}_s \neg B := И$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{val}_s B = Л$ (и $\mathbf{val}_s \neg B := Л$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{val}_s B = И$);
3. $\mathbf{val}_s B \vee C := Л$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{val}_s B = \mathbf{val}_s C = Л$;
4. $\mathbf{val}_s B \,\&\, C := И$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{val}_s B = \mathbf{val}_s C = И$;
5. $\mathbf{val}_s B \supset C := \mathbf{val}_s (\neg B \vee C)$;
6. $\mathbf{val}_s A \equiv B := \mathbf{val}_s ((B \supset C) \,\&\, (C \supset B))$.

24. Доказать, что если (а) $A \mathrel{\mathring{=}} B \vee C$ (б) $A \mathrel{\mathring{=}} B \supset C$, причем при интерпретациях s_1 и s_2 $\mathbf{val}_{s_1} B = \mathbf{val}_{s_2} B$ и $\mathbf{val}_{s_1} C = \mathbf{val}_{s_2} C$, то $\mathbf{val}_{s_1} A = \mathbf{val}_{s_2} A$

25. Доказать, что если a — фиктивная переменная для формулы A, $s_1(a) = И$, $s_2(a) = Л$, то $\mathbf{val}_{s_1} A = \mathbf{val}_{s_2} A$.

26. Доказать, что если a — фиктивная переменная для формулы A, то для некоторой формулы B

$$A \sim (a \vee \neg a) \,\&\, B.$$

27. Доказать, что если a — фиктивная переменная для формулы A, то для некоторой формулы B

$$A \sim (a \,\&\, \neg a) \vee B.$$

Конъюнктивная нормальная форма определяется схемой:
КНФ :: ЭД | (КНФ)&(ЭД)
ЭД:: Переменная | ¬Переменная |ЭД∨ЭД

Дизъюнктивная нормальная форма определяется схемой:

ДНФ :: ЭК | (ДНФ)∨(ЭК)

ЭК:: Переменная | ¬Переменная |ЭК&ЭК

Нормальная форма называется совершенной, если все ее ЭД (ЭК) содержат все переменные формулы, каждая переменная входит в каждую ЭД (ЭК) в точности один раз и все вхождения переменных в ЭД (ЭК) упорядоченны.

28. Привести следующие формулы к конъюнктивной и дизъюнктивной нормальным формам:

    (а) $x \supset y \supset z \supset \neg x \supset (\neg y \supset \neg z)$;
    (б) $x \supset y \supset \neg x \supset \neg y \supset \neg z \supset z$;
    (в) $x \supset (y \supset z) \supset (x \supset \neg z \supset (x \supset \neg y))$;
    (г) $x \,\&\, (\neg y \vee \neg z) \,\&\, (x \supset y) \,\&\, (x \supset z)$;
    (д) $x \supset \neg\, (y \vee x \supset z) \,\&\, (x \vee (y \supset z))$;
    (е) $z \supset y \vee (z \equiv y \,\&\, \neg x)$;
    (ж) $x \,\&\, (\neg y \vee z \supset z \vee (\neg x \supset y))$;
    (з) $x \supset \neg\, (y \,\&\, z \supset \neg x) \equiv x \vee y \,\&\, z$;
    (и) $x \vee y \equiv \neg z \,\&\, y \supset \neg x \vee (y \supset z)$;
    (й) $x \,\&\, y \vee \neg\, (z \equiv y \supset \neg x) \vee (y \supset x \,\&\, z)$;
    (к) $(\neg x \supset y \supset (z \supset \neg y)) \vee (x \,\&\, y \equiv z)$;
    (л) $(x \supset y \vee z) \,\&\, \neg x \vee (z \supset x)$.

29. Преобразовать нормальные формы, полученные в задаче 28 к совершенным нормальным формам или показать, что таких форм не существует.

30. Следующие формулы привести к совершенным нормальным конъюнктивным и дизъюнктивным формам, или показать, что для данной формулы соответствующей формы не существует:

    (а) $x \supset y \supset z \supset \neg x \supset (\neg y \supset \neg z)$;
    (б) $x \supset y \supset \neg x \supset \neg y \supset \neg z \supset z$;
    (в) $x \supset (y \supset z) \supset (x \supset \neg z \supset (x \supset \neg y))$;
    (г) $x \,\&\, (\neg y \vee \neg z) \,\&\, (x \supset y) \,\&\, (x \supset z)$;
    (д) $\neg\, (x \,\&\, y \supset x) \vee x \,\&\, (y \vee z)$;
    (е) $\neg\, (x \,\&\, (y \vee z)) \supset x \,\&\, y \vee z$;
    (ж) $(x \supset y) \,\&\, (x \supset z) \supset (x \supset y \,\&\, z)$.

31. Получившиеся в упражнении 30 совершенные нормальные формы привести к алфавитно-упорядочен-ым.

32. По данным таблицам истинности составить пропозициональные формулы, упростить их.

(а)

x	y	z	$\mathfrak{A}(x,y,z)$
И	И	И	И
И	И	Л	И
И	Л	И	И
И	Л	Л	Л
Л	И	И	Л
Л	И	Л	И
Л	Л	И	И
Л	Л	Л	Л

(б)

x	y	z	$\mathfrak{A}(x,y,z)$
И	И	И	Л
И	И	Л	Л
И	Л	И	Л
И	Л	Л	И
Л	И	И	И
Л	И	Л	Л
Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	Л

(в)

u	v	w	t	$\mathfrak{A}(u,v,w,t)$
И	И	И	И	И
И	И	И	Л	И
И	И	Л	И	Л
И	И	Л	Л	И
И	Л	И	И	И
И	Л	И	Л	И
И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	Л	Л
Л	И	И	И	И
Л	И	И	Л	И
Л	И	Л	И	И
Л	И	Л	Л	И
Л	Л	И	И	И
Л	Л	И	Л	И
Л	Л	Л	И	И
Л	Л	Л	Л	И

(г)

u	v	w	t	$\mathfrak{A}(u,v,w,t)$
И	И	И	И	Л
И	И	И	Л	Л
И	И	Л	И	И
И	И	Л	Л	Л
И	Л	И	И	Л
И	Л	И	Л	Л
И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	И
Л	И	И	Л	Л
Л	И	Л	И	Л
Л	И	Л	Л	Л
Л	Л	И	И	Л
Л	Л	И	Л	Л
Л	Л	Л	И	Л
Л	Л	Л	Л	Л

Одной из возможных интерпретаций формул служит так называемая контактно-релейная схема, в которой переменные трактуются как замыкающие контакты, отрицание переменной — как размыкающий контакт, связка дизъюнкции изображается параллельным соединением схем, конъюнкции — последовательным. Схема с меньшим числом контактов считается более простой. Эквивалентными схемами считаются схемы, которые проводят или не проводят ток при одинаковой комбинации включенных контактов. При этом прохождение тока по схеме соответствующей формуле равносильно ее истинности. Процесс построения более простой схемы эквивалентной данной называется упрощением.

33. Нарисовать схемы, соответствующие формулам:

(а) $(x \vee y \mathbin{\&} \neg z) \mathbin{\&} (x \supset y) \mathbin{\&} (x \mathbin{\&} \neg z \vee \neg x)$;

(б) $x \vee y \vee z \mathbin{\&} \neg x \mathbin{\&} (x \vee z \vee x \mathbin{\&} y)$;

(в) $x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} (z \vee \neg x) \vee x \mathbin{\&} z$;

(г) $(x \vee (y \supset z)) \mathbin{\&} (y \supset z) \mathbin{\&} (x \vee y \vee z)$;

(д) $(((\neg x \supset z) \mathbin{\&} (y \supset z)) \vee y) \mathbin{\&} (x \vee (y \supset z))$;

(е) $x \mathbin{\&} y \vee \neg z \vee (\neg x \supset z) \mathbin{\&} (x \supset z) \mathbin{\&} (x \supset \neg z)$;

(ж) $x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} z \vee x \mathbin{\&} \neg y \mathbin{\&} z \vee y \mathbin{\&} z \vee x \mathbin{\&} y \mathbin{\&} \neg z \vee x \mathbin{\&} \neg y \mathbin{\&} \neg z$;

(з) $z \mathbin{\&} (x \vee \neg y) \vee \neg z \mathbin{\&} x \vee (y \supset z)$;

(и) $x \vee y \vee \neg z \vee x \mathbin{\&} \neg y \mathbin{\&} z \mathbin{\&} (x \vee \neg z)$;

(й) $(\neg y \supset \neg x) \mathbin{\&} z \mathbin{\&} \neg y \vee \neg x \vee y \vee \neg z$;

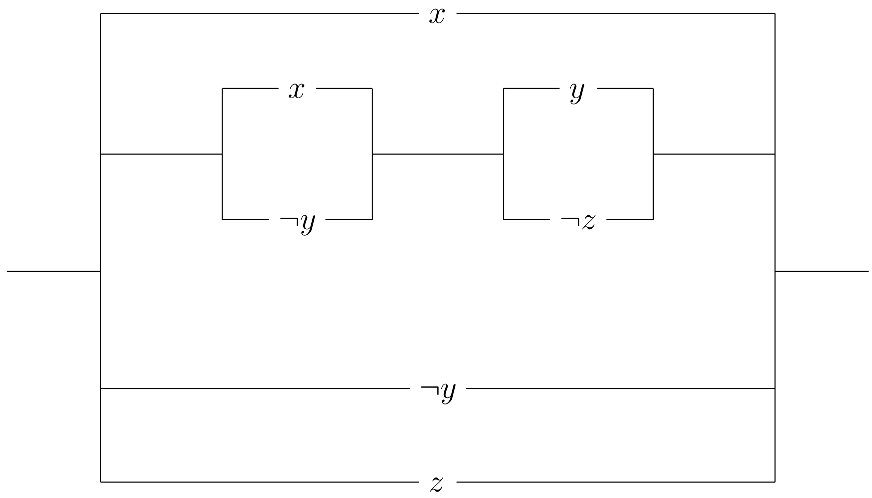
(к) $(x \mathbin{\&} y \vee z \vee \neg y \mathbin{\&} x) \mathbin{\&} (x \mathbin{\&} y \vee \neg x \vee y \vee z)$;

(л) $(x \mathbin{\&} \neg z \vee x \mathbin{\&} y \neg z) \mathbin{\&} (x \mathbin{\&} \neg z \vee (\neg x \vee \neg y) \mathbin{\&} z)$.

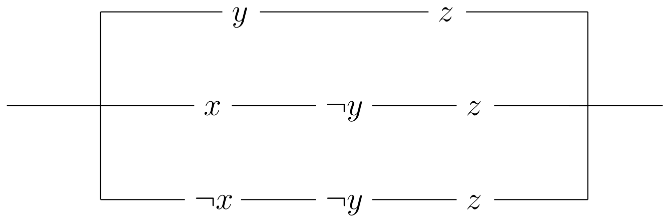
34. Полученные в задаче 33 схемы привести к наиболее простому виду.

35. Упростить схемы.

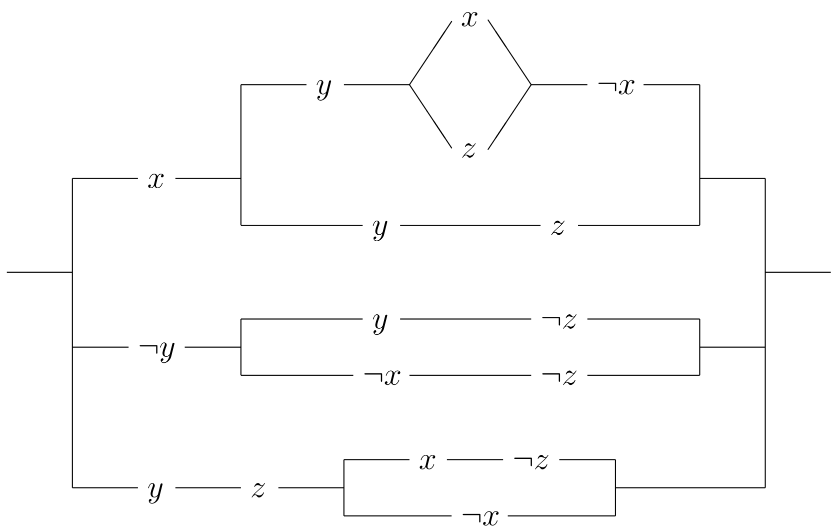
(а)



(б)



(в)



36. Построить схему из трех контактов, которая пропускала бы ток в том и только том случае, когда замкнуты ровно два контакта из трех.

37. Принятие решения осуществляется

(а) простым большинством;

(б) квалифицированным числом голосов (должно проголосовать “за” строго более n участников из m).

Построить соответствующие "машины для голосования".

38. Выяснить, какие из приведенных систем логических связок полны, то есть любая формула равнозначна формуле, записанной только с помощью этих связок:

   (а) $\{\&, \vee, \supset\}$;
   (б) $\{\equiv, \veebar\}$;
   (в) $\{\neg, \veebar\}$;
   (г) $\{\equiv, \vee, \boldsymbol{Л}\}$;
   (д) $\{\supset, \boldsymbol{Л}\}$;
   (е) $\{\supset, \neg\}$;
   (ж) $\{\veebar, \&, \boldsymbol{И}\}$;
   (з) $\{\equiv, \&\}$;
   (и) $\{\&, \vee\}$;
   (й) $\{\neg, \vee\}$.

   В задачах (г), (д), (ж) под системой понимается набор связок и разрешается использование логической константы.

39. Доказать, что $\neg$ нельзя выразить через $\&$, $\vee$, $\supset$, $\equiv$.

40. Доказать, что $\supset$ невыразима через $\&$, $\vee$.

41. Доказать, что конъюнкция не выражается через дизъюнкцию и импликацию.

42. Доказать полноту системы из одной логической связки стрелка Пирса $\downarrow$, где $A \downarrow B \triangleq \neg(A \vee B)$.

Понятие выводимости формул основывается на понятии выводимости секвенций. Секвенцией называется выражение вида

Список Формул $\longrightarrow$ Список формул

Список формул:: Пустой список | Список формул Формула

Аксиомой считается секвенция вида $\Gamma_1 A \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1 A \Delta_2$. Выводом называется последовательность секвенций $\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_m$ такая, что каждая секвенция σ_i либо является аксиомой, либо непосредственным следствием секвенций с меньшими номерами. Непосредственное следствие получается по правилам вывода. Правила вывода бывают одно- и двухпосылочные и являются преобразованием секвенций посредством введения логических связок. Перечислим их.

1. Введение отрицания: $\dfrac{\Gamma_1 A \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1 \Delta_2}{\Gamma_1 \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1 \neg A \Delta_2}$; $\dfrac{\Gamma_1 \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1 A \Delta_2}{\Gamma_1 \neg A \Gamma_2 \longrightarrow \Delta_1 \Delta_2}$.
2. Введение конъюнкции: $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 A \Delta_2 \ \Gamma \longrightarrow \Delta_1 B \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 A \,\&\, B \Delta_2}$; $\dfrac{\Gamma_1 A, B, \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1 A \,\&\, B \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}$.
3. Введение дизъюнкции: $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 A \vee B \Delta_2}$; $\dfrac{\Gamma_1 A \Gamma_2 \longrightarrow \Delta \ \Gamma_1 B \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1 A \vee B \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}$.

Остальные правила введения логических связок могут быть получены путем доказательства их допустимости: правило называется допустимым, если любая секвенция доказуемая с его применением может быть доказана без его применения. Секвенция называется выводимой, если она является последней секвенцией некоторого вывода. Если секвенция σ выводима, то пишут $\vdash \sigma$. Формула A называется выводимой, если выводима секвенция $\longrightarrow A$. Формула A называется выводимой из гипотез $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — в обозначениях $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$ —, если $\vdash A_1, A_2, \ldots, A_n \longrightarrow A$.

Формульным образом секвенции $S = \Gamma \longrightarrow \Delta$ называется формула $\&\Gamma \supset \bigvee \Delta$. Ясно, что выводимость секвенции равносильна выводимости ее формульного образа. Мы считаем, что валентность секвенции совпадает с валентностью ее формульного образа.

43. Показать, что для любых формул A и B

(а) $\vdash И$;
(б) $A \vdash A \vee B$;
(в) $A \,\&\, B \vdash A$;

44. Доказать, что если $\mathcal{S}$ — аксиома, то $\mathcal{S} \sim И$.

45. Доказать, что

(а) $\vdash \mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{S} \sim И$;
(б) $\vdash A$ тогда и только тогда, когда $A \sim И$;
(в) если $A_1 \sim И$, $A_2 \sim И$,…,$A_n \sim И$ и $A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_n \vdash A$, то $A \sim И$
(г) формула $Л$ невыводима.

46. Построить вывод секвенций или показать, что секвенция невыводима:

(а) $B \supset A \quad B \supset \neg A \vee C \to B \supset \neg B \vee C$;
(б) $A \supset B \quad B \supset C \to A \supset C$;
(в) $\neg A \vee B \quad C \vee \neg B \to A \supset C \quad A \supset \neg C$;
(г) $\to A \vee B \supset A \,\&\, C$;
(д) $A \supset (B \supset C) \to A \,\&\, B \supset C$;
(е) $B \supset A \quad B \supset (A \supset C) \to B \supset C$;
(ж) $\neg\,(A \,\&\, (B \vee C)) \to A \,\&\, B \vee C$;
(з) $A \,\&\, B \supset C \to A \supset (B \supset C)$;
(и) $A \,\&\, B \quad \neg A \,\&\, \neg B \to A \supset C \equiv (B \equiv C)$;
(й) $A \quad A \supset B \to B$;
(к) $A \supset B \quad B \supset C \quad A \to C$;
(л) $A \supset B \supset B \to B$;
(м) $A \supset (B \supset C) \quad \neg B \supset C \to \neg C \vee B$;
(н) $A \equiv B \to \neg A \equiv B)$;
(о) $A \equiv B \to A \,\&\, C \equiv B \,\&\, C$;
(п) $A \equiv B \to C \,\&\, A \equiv C \,\&\, B$;
(р) $A \equiv B \to A \vee C \equiv B \vee C$;
(с) $A \equiv B \to C \vee A \equiv C \vee B$;
(т) $A \equiv B \to A \supset C \equiv B \supset C$;
(у) $A \equiv B \to C \supset A \equiv C \supset B$.
(ф) $A \supset B \supset B \to A$;

47. Доказать, что $\vdash A \equiv B \to B \equiv A$ для любых пропозициональных формул A и B.

48. Доказать выводимость следующих пропозициональных формул:

(а) $A \equiv \neg\neg A$;
(б) $A \vee B \equiv B \vee A$;
(в) $A \,\&\, B \equiv B \,\&\, A$;
(г) $(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$;
(д) $(A \,\&\, B) \,\&\, C \equiv A \,\&\, (B \,\&\, C)$;
(е) $A \vee (B \,\&\, C) \equiv (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$;
(ж) $A \,\&\, (B \vee C) \equiv A \,\&\, B \vee A \,\&\, C$;
(з) $A \vee (A \,\&\, B) \equiv A$;
(и) $A \,\&\, (A \vee B) \equiv A$;
(й) $A \supset B \equiv \neg A \vee B$;
(к) $(A \equiv B) \equiv (A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$;
(л) $\neg (A \vee B) \equiv \neg A \,\&\, \neg B$;
(м) $\neg (A \,\&\, B) \equiv \neg A \vee \neg B$.

49. Доказать, что если $\vdash \Gamma \quad A \to B$, то $\vdash \Gamma \to A \supset B$ (теорема дедукции).

50. Доказать, что для любых пропозициональных формул A и B $A \sim B$ тогда и только тогда, когда $\vdash A \equiv B$.

51. Пусть $\vdash A$ и $B \sim A$, тогда $\vdash B$.

52. Доказать допустимость правил вывода:

(а) $\dfrac{\Gamma_1 \quad A \quad \Gamma_2 \to \Delta_1 \quad \Delta_2;\ \Gamma_1 \quad B \quad \Gamma_2 \to \Delta_1 \quad \Delta_2}{\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \to \Delta_1 \quad A \downarrow B \quad \Delta_2}$;

(б) $\dfrac{\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \to \Delta_1 \quad A \quad B \quad \Delta_2}{\Gamma_1 \quad A \downarrow B \quad \Gamma_2 \to \Delta_1 \quad \Delta_2}$;

53. Доказать, что следующие правила вывода допустимы.

(а) $\dfrac{\Gamma_1 \quad A \quad A \quad \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1 \quad A \quad \Gamma_2 \to \Delta}$;

(б) $\dfrac{\Gamma \to \Delta_1 \quad A \quad A \quad \Delta_2}{\Gamma \to \Delta_1 \quad A \quad \Delta_2}$;

(в) $\dfrac{\Gamma_1 \quad P \quad \Gamma_2 \quad Q \quad \Gamma_3 \to \Delta}{\Gamma_1 \quad Q \quad \Gamma_2 \quad P \quad \Gamma_3 \to \Delta}$;

(г) $\dfrac{\Gamma \to \Delta_1 \quad P \quad \Delta_2 \quad Q \quad \Delta_3}{\Gamma \to \Delta_1 \quad Q \quad \Delta_2 \quad P \quad \Delta_3}$;

(д) $\dfrac{\Gamma_1 \quad \Gamma_2 \to \Delta}{\Gamma_1 \quad A \quad \Gamma_2 \to \Delta}$.

Язык исчисления предикатов определяется своим алфавитом, в который входят переменные, символы сигнатуры: константы, функциональные и предикатные символы,кванторы, логические связки и скобки.

Терм строится по схеме:

Терм :: Переменная | Константа | Функциональный символ(Терм, Терм, ..., Терм)

Формула (исчисления предикатов) строится схемой:

Формула :: Атомарная формула | (¬Формула) | (Формула Логическая связка Формула) | (Квантор Переменная Формула)

Атомарная формула имеет вид Предикатный символ(Терм, Терм,..., Терм).

В последнем случае говорят, что квантор связывает переменную, а формула называется зоной действия квантора по переменной. Вхождение переменной непосредственно вслед за квантором или в зону действия квантора называется связанным. Не связанное вхождение называется свободным. Если переменная имеет хотя бы одно связанное вхождение, то она называется связанной для этой формулы. Свободная переменная — это такая, которая имеет хотя бы одно свободное вхождение.

Относительно опускания скобок в формулах действует тот же приоритет, что и в формулах исчисления высказываний, причем кванторы имеют тот же приоритет, что и связка отрицания.

54. Рассмотрим язык с сигнатурой $\langle \theta; F_1, G_2, H_3; \mathrm{P}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{Q}_3 \rangle$. Являются ли следующие слова термами?

(а) $F_1(G_2(x,\theta))$;

(б) $F_1(x,y)$;

(в) $H_3(G_2(x,G_2(\theta,y)),x,F_1(\theta))$;

(г) $F_1(G_2(H_3(z,t,\theta),x)$;

(д) $G_2(\mathrm{S}_2(x,H_3(x,y,z)))$.

55. Рассмотрим язык с сигнатурой $\langle \theta; F_1, G_2, H_3; \mathrm{P}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{Q}_3 \rangle$. Являются ли следующие слова формулами исчисления предикатов?

(а) $\mathrm{S}_2(F_1(G_2(x,\theta)),y)$;

(б) $\mathrm{P}_1(G_2(\mathrm{S}_2(x,\theta),y))$;

(в) $((\forall x \mathrm{Q}_3(x,y,z)) \vee G_2(\theta,x))$;

(г) $(((\exists x \mathrm{S}_2(x,\theta)) \supset (\forall y \mathrm{P}_1(G_2(y,\theta)))))$.

56. Подбирая подходящую сигнатуру, формализовать следующие фразы:

(а) Если хотя бы один юрист честен и только женщины являются честными, то существуют женщины-юристы.

(б) Если всякий, кто умеет считать — математик, то существуют математики, не знающие таблицу умножения.

(в) Если всякий, кто любит считать ворон или овец, является экономистом, то всякий экономист — любитель считать овец.

(г) Если каждая селедка — рыба, то существуют рыбы, не умеющие плавать.

(д) Всякий, кто находится в здравом уме, может понимать математику.

(е) Все рыбы, кроме акул, добры к детям.

(ж) Ни один из сыновей Джорджа Буля не является писателем.

(з) Всякая селедка — рыба, но не каждая селёдка умеет разговаривать.

(и) Если все юристы — жулики, то существуют как юристы, так и жулики, которые боятся судей.

(й) Каждый человек имеет предка, следовательно, существует последняя обезьяна.

57. В языке сигнатуры $\langle \theta; F_1, G_2, H_3; \mathrm{P}_1, \mathrm{S}_2, \mathrm{Q}_3 \rangle$ определить все свободные и связанные переменные, а также зоны действия кванторов по всем связанным переменным. Указать, если формула является утверждением.

(а) $(\forall x(\mathrm{S}_2(x,\theta) \mathbin{\&} (\mathrm{Q}_3(x,\theta,G_2(x,y)))))$;
(б) $((\exists y(\mathrm{Q}_3(G_2(\theta,F_1(y)),z,\theta) \supset (\forall z\mathrm{S}_2(z,G_2(\theta,y)))))\supset$
$\supset(\forall z\mathrm{P}_1(G_2(z,y))))$;
(в) $(\neg(\forall x(\mathrm{S}_2(x,G_2(x,F_1(\theta))) \equiv (\forall y\mathrm{S}_2(x,H_3(x,y,\theta))))))$.

58. Пусть x имеет только свободные вхождения в формулу исчисления предикатов A, а терм τ свободен для подстановки в формулу A вместо x. Доказать, что $[A]^x_\tau$ есть формула исчисления предикатов.

59. Определить, является ли терм $F_2(x,y)$ свободным для подстановки вместо t в следующие формулы

(а) $(\forall x(\mathrm{P}_1(x) \supset \mathrm{Q}_2(t,x)))$;
(б) $(\forall t(\mathrm{P}_1(t) \supset \mathrm{Q}_2(t,x)))$;
(в) $((\forall x\mathrm{Q}_2(x,t)) \vee (\forall y\mathrm{Q}_2(t,y)))$;
(г) $((\exists x\mathrm{S}_3(x,y,z)) \mathbin{\&} (\forall z\mathrm{S}_3(x,t,z)))$.

60. Восстановить до формулы в полной скобочной записи

(а) $\forall x\mathrm{P}_2(x,y) \supset \neg\exists x\mathrm{Q}_1(F_2(x,y))$;
(б) $\neg(\exists x\mathrm{Q}_1(x) \vee \mathrm{S}_1(x))$;
(в) $\exists y\neg(\exists x\mathrm{Q}_1(x) \vee \mathrm{S}_1(y))$;
(г) $(\exists x\mathrm{Q}_1(x) \vee \exists y\mathrm{Q}_1(y))$;
(д) $\exists x\exists y(\mathrm{P}_2(x,y) \vee \mathrm{R}_2(x,y) \mathbin{\&} \mathrm{Q}_1(F_2(x,y)))$.

61. Сократить максимальное количество скобок в формулах

(а) $(\forall x((\mathrm{P}_2(x,G_2(x,x)) \vee (\neg\mathrm{Q}_1(x)))))$;
(б) $(\neg(\forall x(\exists y\mathrm{P}_2(x,y)) \mathbin{\&} (\forall z\mathrm{P}_2(z,z))))$;
(в) $((((\forall x\mathrm{Q}_1(x)) \vee (\mathrm{P}_2(x,F_2(x,y)))) \mathbin{\&} (\exists y\mathrm{Q}_1(x))))$

62. Указать все свободные и связанные вхождения переменных и зоны действия кванторов по всем переменным формул в сокращенной скобочной записи

(а) $\forall x\mathrm{P}_2(x,y) \supset \mathrm{Q}_1(x)$;
(б) $\neg(\exists x\mathrm{Q}_1(F_2(x,y)) \mathbin{\&} \mathrm{P}_2(x,y))$;
(в) $\neg\exists x\neg\forall y\mathrm{P}_2(x,y) \vee \neg\mathrm{Q}_1(F_2(x,y))$.

63. Определить, свободен ли терм $F_2(x,y)$ для подстановки вместо t в формулы

(а) $\forall x\mathrm{P}_2(x,t) \supset \mathrm{Q}_1(t)$;
(б) $\exists t\mathrm{P}_2(x,t) \vee \mathrm{Q}_1(t)$;
(в) $\neg(\forall x\mathrm{Q}_1(x) \supset \mathrm{Q}_1(t))$.

64. Рассмотрим язык исчисления предикатов $\boldsymbol{\mathcal{L}_1^{sp}}$, предназначенный для описания свойств натуральных чисел, в котором имеется два трехместных предикатных символа P_3 и S_3. При этом $\mathrm{S}\,(x,y,z)$ содержательно означает, что $x+y=z$, а

$\mathrm{P}(x,y,z)$ — $x \cdot y = z$. Записать в языке $\boldsymbol{\mathcal{L}_1^{sp}}$ формулу с единственной свободной переменной, соответствующую выражению:

(а) $x = 0$;
(б) $x = 1$;
(в) $x = 2$;
(г) x — четное число;
(д) x — простое число.

65. В языке $\boldsymbol{\mathcal{L}_1^{sp}}$ из задачи 64 записать формулу с двумя свободными переменными, соответствующую выражению:

(а) $y = x + 1$;
(б) $x \leq y$;
(в) $x = y$;
(г) $x < y$;
(д) x является делителем y.

66. Для описания взаимного расположения в пространстве геометрических объектов рассмотрим язык $\boldsymbol{\mathcal{L}_1^{\Gamma}}$, имеющий три одноместных предикатных символа **Т**, **Пр** и **Пл** для описания свойств "быть точкой", "быть прямой" и "быть плоскостью" соответственно, и один двухместный предикатный символ **Л** для формализации понятия "лежать на". Формализовать в языке $\boldsymbol{\mathcal{L}_1^{\Gamma}}$:

(а) Через каждые две точки проходит прямая и, если точки различны, то прямая единственна.
(б) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.
(в) Определение параллельных прямых.
(г) Аксиому о параллельных в Эвклидовой геометрии.
(д) На каждой прямой существуют по крайней мере две различные точки.
(е) Две плоскости либо не имеют общих точек, либо имеют единственную общую прямую.
(ж) Если две прямые имеют общую точку, то они имеют еще по крайней мере одну общую точку.
(з) Через точку, лежащую вне данной прямой, проходит единственная плоскость.
(и) Существуют скрещивающиеся прямые.
(й) Любые две прямые либо не пересекаются, либо совпадают.
(к) Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.
(л) Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Семантика языка исчисления предикатом достигается указанием структуры — множества с выделенным подмножеством, выделенными классами отношений и операций. Пусть $\mathfrak{M} = \langle M; M_0 \supset M; \mathfrak{R}; \mathfrak{O} \rangle$. Сопоставим каждой константе c языка ее имя $c^{\mathfrak{M}} \in M_0$, каждому предикатному символу P его имя $p^{\mathfrak{M}} \subset M^n$ — отношение соответствующей местности, каждому функциональному символу F его имя $F^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{O}$ — операцию соответствующей арности.

Интерпретацией языка в его алгебраической структуре называется функция s, сопоставляющая каждой переменной некоторый элемент M.

Значение терма t в структуре $\mathfrak{M}$ при интерпретации s определяется рекурсией по строению терма:

если $t = x$, то $t^{\mathfrak{M}}[s] = s\,(x)$;

если $t = c$, то $t^{\mathfrak{M}}[s] = c^{\mathfrak{M}}$;

если $t = F\,(t_1, t_2, \ldots, t_k)$, то $t^{\mathfrak{M}}[s] = F^{\mathfrak{M}}\left(t_1^{\mathfrak{M}}[s], t_2^{\mathfrak{M}}[s], \ldots, t_k^{\mathfrak{M}}[s]\right)$.

Для каждой формулы A, структуры $\mathfrak{M}$ и интерпретации s определим отношение $\mathfrak{M} \models A[s]$, читаемое как "формула A истинна в структуре $\mathfrak{M}$ при интерпретации s"рекурсией по строению формулы:

1. $\mathfrak{M} \models P\,(t_1, t_2, \ldots, t_l)\,[s]$ тогда и только тогда, когда $\left\langle t_1^{\mathfrak{M}}, t_2^{\mathfrak{M}}, \ldots, t_l^{\mathfrak{M}}\right\rangle \in P^{\mathfrak{M}}$;

2. $\mathfrak{M} \models \neg B[s]$ тогда и только тогда, когда неверно, что $\mathfrak{M} \models B[s]$;

3. $\mathfrak{M} \models B \,\&\, C[s]$ тогда и только тогда $\mathfrak{M} \models B[s]$ и $\mathfrak{M} \models C[s]$;

4. $\mathfrak{M} \models \exists x B[s]$ тогда и только тогда, когда для некоторого $m \in M$ $\mathfrak{M} \models B\,[s_m^x]$, где s_m^x — интерпретация s_1 такая, что $s_1\,(x) = m$ и при $y \neq x$ $s_1\,(y) = s\,(y)$.

Дальнейшие связки и квантор всеобщности можно считать определяемыми и, следовательно, для них определение истинности сводится к изложенным.

Формула (список гипотез) называется выполнимой, если существует хотя бы одна структура и интерпретация в ней, при которой эта формула (все гипотезы) истинны. Тождественно истинная формула, или предикатная тавтология, это такая формула, которая истинна в любой структуре при любой интерпретации. Если формула ложна в некоторой структуре при некоторой интерпретации, то она называется опровержимой. Тождественно ложная формула, или противоречие, это формула, ложная во всех структурах при любой интерпретации.

67. Исследовать истинность формулы $\forall x \mathrm{R}(x, P(x,x))$ в структурах $\mathfrak{N}_2$ и $\mathfrak{P}\mathbf{I}$.

68. Исследовать истинность формулы $\exists x \mathrm{R}(x, P(x,x))$ в структурах $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{N}_3$ и $\mathfrak{P}\mathbf{I}$.

69. Проверить, какие из приведенных ниже формул являются выполнимыми, опровержимыми, тождественно истинными, тождественно ложными (A, B, C — предикатные символы с соответствующей местностью):

(а) $\exists x \mathrm{A}(x)$;
(б) $\forall x \mathrm{A}(x)$;
(в) $\exists x \forall y (\mathrm{A}(x,x) \,\&\, \neg \mathrm{A}(x,y))$;
(г) $\exists x \exists y (\mathrm{A}(x) \,\&\, \neg \mathrm{A}(y))$
(д) $\exists x \forall y (\mathrm{A}(x,y) \supset \forall z \mathrm{B}(x,y,z))$;
(е) $\mathrm{A}(x) \supset \forall y \mathrm{A}(y)$;
(ж) $\exists x \mathrm{A}(x) \supset \forall x \mathrm{A}(x)$;
(з) $\forall x \exists y (\mathrm{A}(x) \equiv \neg \mathrm{A}(y))$;
(и) $\exists y \forall x (\mathrm{A}(x) \equiv \neg \mathrm{A}(y))$;
(й) $\exists x \forall y \exists z (\mathrm{A}(x) \equiv \mathrm{B}(y) \vee \mathrm{C}(z))$;
(к) $\neg (\exists x \mathrm{A}(x) \supset \forall x \mathrm{A}(x))$;
(л) $\exists x \forall y \mathrm{A}(x,y) \supset \forall y \exists x \mathrm{A}(x,y)$;
(м) $\forall x \exists y \mathrm{A}(x,y) \supset \exists y \forall x \mathrm{A}(x,y)$;
(н) $\exists x \mathrm{A}(x) \supset \forall x \mathrm{B}(x) \equiv \forall x (\mathrm{A}(x) \supset \mathrm{B}(x))$;
(о) $\forall x \mathrm{A}(x) \supset \exists x \mathrm{B}(x) \equiv \exists x (\mathrm{A}(x) \supset \mathrm{B}(x))$;
(п) $\forall x (\mathrm{A}(x) \supset \neg \mathrm{B}(x)) \supset \neg (\forall x \mathrm{A}(x) \,\&\, \exists x \mathrm{B}(x))$

70. Упростить формулы

(а) $\neg \exists x \forall y (\mathrm{P}(x,y) \supset \forall z (\neg \mathrm{P}(x,y) \vee \mathrm{S}(y,z)))$;
(б) $\forall x (\mathrm{P}(x) \supset \neg \mathrm{Q}(x)) \supset \neg \exists x \mathrm{P}(x) \,\&\, \forall x \mathrm{Q}(x)$.

71. Рассмотрим язык алгебраических выражений $\mathbf{L}_\mathbf{1}^{\boldsymbol{al}}$:

$$\mathbf{L}_\mathbf{1}^{\boldsymbol{al}} \left\langle \theta, \varepsilon; S_2, P_2; \mathrm{R}_2 \right\rangle .$$

и 3 алгебраические структуры с следующим заданием имен элементов сигнатуры языка

(1) $\mathfrak{N}_1 = (\mathbb{N}, \{+, \cdot\}, \{=\})$,

$$\begin{array}{ccccc} \theta & \rightsquigarrow & \theta^{\mathfrak{N}_1} & = & 0 \ , \\ \varepsilon & \rightsquigarrow & \varepsilon^{\mathfrak{N}_1} & = & 1 \ , \\ S_2 & \rightsquigarrow & S_2^{\mathfrak{N}_1} & = & + \ , \\ P_2 & \rightsquigarrow & P_2^{\mathfrak{N}_1} & = & \cdot \ , \\ \mathrm{R}_2 & \rightsquigarrow & \mathrm{R}_2^{\mathfrak{N}_1} & = & = . \end{array}$$

(2) $\mathfrak{N}_2 = (\mathbb{N}, \{+, \cdot\}, \{\leqslant\})$,

$$\begin{array}{ccccc} \theta & \rightsquigarrow & \theta^{\mathfrak{N}_1} & = & 0\ , \\ \varepsilon & \rightsquigarrow & \varepsilon^{\mathfrak{N}_1} & = & 1\ , \\ S_2 & \rightsquigarrow & S_2^{\mathfrak{N}_1} & = & +\ , \\ P_2 & \rightsquigarrow & P_2^{\mathfrak{N}_1} & = & \cdot\ , \\ \mathrm{R}_2 & \rightsquigarrow & \mathrm{R}_2^{\mathfrak{N}_1} & = & \leqslant . \end{array}$$

(3) $\mathfrak{N}_3 = (\mathbb{N}, \{+, \cdot\}, \{|\})$,

$$\begin{array}{ccccc} \theta & \rightsquigarrow & \theta^{\mathfrak{N}_1} & = & 0\ , \\ \varepsilon & \rightsquigarrow & \varepsilon^{\mathfrak{N}_1} & = & 1\ , \\ S_2 & \rightsquigarrow & S_2^{\mathfrak{N}_1} & = & +\ , \\ P_2 & \rightsquigarrow & P_2^{\mathfrak{N}_1} & = & \cdot\ , \\ \mathrm{R}_2 & \rightsquigarrow & \mathrm{R}_2^{\mathfrak{N}_1} & = & |\ . \end{array}$$

(4) $\mathfrak{P}\mathbf{I} = (\mathcal{P}(\mathbf{I}), \{\cup, \cap\}, \{\subset\})$, где за $\mathcal{P}(\mathbf{I})$ обозначено множество всех подмножеств некоторого непустого множества $\mathbf{I}$,

$$\begin{array}{ccccc} \theta & \rightsquigarrow & \theta^{\mathfrak{N}_1} & = & \varnothing\ , \\ \varepsilon & \rightsquigarrow & \varepsilon^{\mathfrak{N}_1} & = & \mathbf{I}\ , \\ S_2 & \rightsquigarrow & S_2^{\mathfrak{N}_1} & = & \cup\ , \\ P_2 & \rightsquigarrow & P_2^{\mathfrak{N}_1} & = & \cap\ , \\ \mathrm{R}_2 & \rightsquigarrow & \mathrm{R}_2^{\mathfrak{N}_1} & = & =\ . \end{array}$$

Написать формулу, определяющие максимум (минимум) двух чисел, наименьшее общее кратное (наибольший общий делитель), объединение (пересечение) двух множеств в соответствующих структурах.

72. В структуре $\mathfrak{P}\mathbf{I}$ (из пункта 4 на странице 21) рассмотрим отношение включения. Рассмотрим язык с единственным предикатным символом P_2, имя которого есть множество $\{(a, b) : a \subset b\}$ $(a, b \subset \mathbf{I})$.

(а) Определить предикатный символ, соответствующий отношению равенства двух множеств.

(б) Ввести трехместный предикатный символ, формализующий понятие пересечения двух множеств.

(в) Ввести трехместный предикатный символ, формализующий понятие объединения двух множеств.

(г) Ввести двухместный предикатный символ, формализующий отношение быть дополнением

(д) Ввести одноместный предикатный символ, формализующий понятие быть пустым множеством.

(е) Ввести одноместный предикатный символ, формализующий понятие быть множеством $\mathbf{I}$.

73. Для структуры $\mathfrak{PI}$ (из пункта 4 на странице 21) рассмотрим язык с двумя двухместными функциональными символами F и G и предикатным символом R, примем $F^{\mathfrak{PI}}$ есть операция пересечения множеств, $G^{\mathfrak{PI}}$ — операция объединения множеств, $\mathrm{R}^{\mathfrak{PI}}$ — отношение равенства множеств. Записать, что

(а) $x \subset y$;
(б) x — одноэлементное множество;
(в) $x = \mathbf{I}$;
(г) $x = \varnothing$.

74. Рассмотрим язык $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{sp}}$ с сигнатурой $\langle ; ; \mathrm{S}_3, \mathrm{P}_3 \rangle$ (см. также задачу 64) и структуру $\mathfrak{N}$ с носителем $\mathbb{N}$, в которой $\mathrm{S}^{\mathfrak{N}} = \{(l, m, n) : l + m = n\}$ и $\mathrm{P}^{\mathfrak{N}} = \{(l, m, n) : l \cdot m = n\}$. Ввести трехместный предикатный символ со следующим множеством истинности

(а) $\{(l, m, n) : n$ — наибольший общий делитель l и $m\}$;
(б) $\{(l, m, n) : n$ — наименьшее общее кратное l и $m\}$.

75. Подбирая формулы с соответствующим множеством истинности, формализовать в языке $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{sp}}$ следующие утверждения о структуре $\mathfrak{N}$ из задачи б.

(а) Множество простых чисел конечно.
(б) Всякое число, большее двух, можно представить в виде суммы двух точных квадратов.
(в) Для всякого натурального числа существует большее число.
(г) Существует наибольшее натуральное число.
(д) Всякое число, строго большее двух, представимо в виде суммы четного и простого или нечетного и точного квадрата.
(е) Уравнение $x^2 + 2x + 1 = 0$ имеет два различных корня.
(ж) Уравнение $2x + 3y = 5$ имеет конечное множество решений.

76. Пусть Q — двухместный предикатный символ, рассмотрим структуру $\mathfrak{M}$ на множестве $\mathbf{M}$, для которого определено отношение нестрогого неравенства для некоторых элементов множества (не про все элементы можно сказать, какой из них меньше, но для каждой пары элементов можно определить, верно ли, что первый меньше второго). Пусть $\mathrm{Q}^{\mathfrak{M}} = \{(n, m) : n \leqslant m\}$. Записать в языке $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{1}} \langle ; ; \mathrm{Q}, \mathrm{R} \rangle$, где $\mathrm{R}^{\mathfrak{M}}$ есть отношение равенства, следующие свойства отношения порядка.

(а) Рефлексивность (сравнимость каждого с самим собой).
(б) Антисимметричность (если из двух элементов первый меньше второго, а второй меньше первого, то они равны).
(в) Транзитивность (если первый меньше второго, а второй меньше третьего, то первый меньший третьего).
(г) Линейность порядка (сравнимость любых двух элементов).
(д) Существует наименьший (наибольший) элемент множества $\mathbf{M}$ (наименьший — самый маленький среди всех элементов).
(е) Существует минимальный (максимальный) элемент множества $\mathbf{M}$ (минимальный — элементов строго меньше которого нет).

(ж) Множество $\mathbf{M}$ — плотно упорядочено (строго между любыми двумя элементами есть третий).

Привести примеры множеств и отношений, обладающих и не обладающих данными свойствами (в соответствующий структурах формулы истинны или ложны).

77. Решить задачу 69, заменив A, B и C формулами исчисления предикатов с соответствующим количеством свободных переменных.

78. Терм τ называется свободным для подстановки в формулу A вместо переменной x, если ни одно свободное вхождение x в A не находится в зоне действия квантора по переменной, имеющей вхождение в терм τ.

    Пусть терм τ свободен для подстановки вместо переменной x в формулу A, и $A(\tau) \mathrel{\hat{=}} [A(x)]^x_\tau$. Доказать, что следующие формулы тождественно истинны

    (а) $A(\tau) \supset \exists x A(x)$.
    (б) $\forall x A(x) \supset A(\tau)$;

    Показать примерами, что условие свободы для подстановки является существенным.

79. Выяснить, какие из приведенных ниже секвенций выводимы. При положительном ответе на вопрос о выводимости построить вывод, при отрицательном — привести пример модели, в которой секвенция ложна (A, B, C — некоторые формулы исчисления предикатов):

    (а) $\forall x \exists y A(x, y) \rightarrow \exists y \forall x A(x, y)$;
    (б) $\rightarrow \forall x \forall y (A(x, y) \supset A(y, x)) \supset \forall x A(x, x)$;
    (в) $\rightarrow \forall x (A(x) \supset B(x)) \supset (\forall x A(x) \supset \forall x B(x))$;
    (г) $\rightarrow \neg \exists x A \equiv \forall x \neg A$;
    (д) $\forall x (A(x) \supset B(x))) \rightarrow \exists x A(x) \supset \exists x B(x)$;
    (е) $\rightarrow \forall x \neg A(x, x) \,\&\, \forall x \forall y \forall z (A(x, y) \,\&\, A(y, z) \supset A(x, z)) \supset$
    $\supset \forall x \exists y A(x, y)$;
    (ж) $\rightarrow \forall x \exists y A(x, y) \supset \forall x \forall y \exists z (A(x, z) \,\&\, A(y, z))$;
    (з) $\exists x A(x, x) \rightarrow \exists x \exists y A(x, y)$;
    (и) $\rightarrow \exists x (A(x) \supset B(x)) \,\&\, \forall x A(x) \supset \forall x B(x)$;
    (й) $\forall x A(x, x) \rightarrow \forall x \forall y \forall z (A(x, y) \,\&\, A(y, z) \supset A(x, z))$;
    (к) $\rightarrow \exists x \forall y A(x, y) \supset \forall y \exists x A(x, y)$;
    (л) $\rightarrow \forall x A \,\&\, \forall x B \equiv \forall x (A \,\&\, B))$;
    (м) $\rightarrow \forall x \forall y \forall z (A(x, y) \,\&\, A(y, z) \supset A(x, z)) \supset \forall x A(x, x)$;
    (н) $\rightarrow \exists x \neg B \equiv \neg \forall x B$;
    (о) $\rightarrow \neg \forall x \neg A \equiv \exists x A$;
    (п) $\rightarrow \exists x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \exists x A(x, y)$;
    (р) $\forall x \neg A(x, x) \,\&\, \forall x \forall y (A(x, y) \vee A(y, x)) \rightarrow \exists x \forall y A(x, y)$;
    (с) $\rightarrow \exists x \forall y A(x, y) \,\&\, \forall x A(x, x) \supset \forall x \forall y (A(x, y) \vee A(y, x))$;

(т) $\rightarrow \exists x A(x) \supset \forall x B(x) \equiv \forall x (A(x) \supset B(x))$;
(у) $\rightarrow \exists x (A(x) \supset B(x)) \equiv (\forall x A(x) \supset \exists x B(x))$;
(ф) $\rightarrow \forall x A(x) \vee \forall x B(x) \supset \forall x (A(x) \vee B(x))$;
(х) $\rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \supset \forall x A(x) \vee \forall x B(x)$;
(ц) $\forall x (A \mathbin{\&} B) \rightarrow \exists x A \mathbin{\&} \exists x B$;
(ч) $\rightarrow \forall x \forall y (A(x, y) \vee A(y, x)) \supset \forall x A(x, x)$;
(ш) $\forall x \forall y \forall z (A(x, y) \supset (A(y, z) \supset A(x, z))) \rightarrow$
$\rightarrow \forall x \forall y (A(x, y) \vee A(y, x))$;
(щ) $\forall x(A \equiv B) \rightarrow \forall x A \equiv \forall x B$;
(ы) $\forall x(A \equiv B) \rightarrow \exists x A \equiv \exists x B$;
(э) $\exists x(A \equiv B) \rightarrow \exists x A \equiv \exists x B$.
(ю) $\exists x(A \equiv B) \rightarrow \forall x A \equiv \forall x B$;

Понятие вывода и выводимости в исчислении предикатов определяются точно также, как и в исчислении высказываний. Добавляются некоторые правила вывода, которые не являются в исчислении предикатов допустимыми.

Приведем эти правила.

Введение квантора существования (квантор всеобщности можно считать определяемым):

$\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 [A]^x_\tau \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 \exists x A \Delta_2}$ при условии, что терм τ свободен для подстановки в A вместо x.

$\dfrac{\Gamma_1 [A]^x_y \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1 \exists x A \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}$ при условии, что y свободен для подстановки вместо x в A и не имеет свободных вхождений в заключение правила.

Сокращения повторений:

$\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 A, A \Delta_2}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 A \Delta_2}$; $\dfrac{\Gamma_1 A, A \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1 A \Gamma_2 \longrightarrow \Delta}$.

Перестановки: $\dfrac{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 A \Delta_2 B \Delta_3}{\Gamma \longrightarrow \Delta_1 B \Delta_2 A \Delta_3}$; $\dfrac{\Gamma_1 A \Gamma_2 B \Gamma_3 \longrightarrow \Delta}{\Gamma_1 B \Gamma_2 A \Gamma_3 \longrightarrow \Delta}$.

Две формулы A и B называются синтаксически эквивалентными, если $A \vdash B$ и $B \vdash A$. В этом случае будем писать $A \rightleftarrows B$.

80. Пусть A, B и C — некоторые формулы исчисления предикатов. Доказать следующие соотношения.

(а) $A \mathbin{\&} B \rightleftarrows B \mathbin{\&} A$;
(б) $A \vee B \rightleftarrows B \vee A$,
(в) $A \equiv B \rightleftarrows B \equiv A$;
(г) $A \vee (B \vee C) \rightleftarrows (A \vee B) \vee C$;
(д) $A \mathbin{\&} (B \mathbin{\&} C) \rightleftarrows (A \mathbin{\&} B) \mathbin{\&} C$;
(е) $A \mathbin{\&} (B \vee C) \rightleftarrows (A \mathbin{\&} B) \vee (A \mathbin{\&} C)$;

(ж) $A \vee (B \,\&\, C) \rightleftarrows (A \vee B) \,\&\, (A \vee C)$;
(з) $\neg(A \,\&\, B) \rightleftarrows \neg A \vee \neg B$;
(и) $\neg(A \vee B) \rightleftarrows \neg A \,\&\, \neg B$;
(й) $A \supset B \rightleftarrows \neg B \supset \neg A$;
(к) $\neg\neg A \rightleftarrows A$;
(л) $A \vee (A \,\&\, B) \rightleftarrows A$;
(м) $A \,\&\, (A \vee B) \rightleftarrows A$;
(н) $A \vee \neg A \rightleftarrows И$;
(о) $A \,\&\, \neg A \rightleftarrows Л$;
(п) $A \vee И \rightleftarrows И$;
(р) $A \vee Л \rightleftarrows A$;
(с) $A \,\&\, И \rightleftarrows A$;
(т) $A \,\&\, Л \rightleftarrows Л$;
(у) $A \,\&\, A \rightleftarrows A$;
(ф) $A \vee A \rightleftarrows A$;
(х) $A \supset B \rightleftarrows \neg A \vee B$;
(ц) $A \equiv B \rightleftarrows (A \supset B) \,\&\, (B \supset A)$;
(ч) $\neg\forall x A \rightleftarrows \exists x \neg A$;
(ш) $\neg\exists x A \rightleftarrows \forall x \neg A$.

81. Пусть A, B — некоторые формулы исчисления предикатов, причем переменная x не входит в B. Доказать следующие соотношения.

(а) $\forall x A \,\&\, B \rightleftarrows \forall x(A \,\&\, B)$;
(б) $\forall x A \vee B \rightleftarrows \forall x(A \vee B)$;
(в) $\exists x A \,\&\, B \rightleftarrows \exists x(A \,\&\, B)$;
(г) $\exists x A \vee B \rightleftarrows \exists x(A \vee B)$;
(д) $\forall x B \rightleftarrows B$;
(е) $\exists x B \rightleftarrows B$;

82. Пусть y не входит в формулу A, тогда

(а) $\forall x A \rightleftarrows \forall y [A]^x_y$;
(б) $\exists x A \rightleftarrows \exists y [A]^x_y$;

Говорят, что формула находится в предваренной нормальной форме, если она имеет вид $q_1 x_1 q_2 x_2 \dots q_l x_l M\,(x_1, x_2, \dots, x_l)$, где q_i — квантор, $M\,(x_1, x_2, \dots, x_l)$ — бескванторная формула, список всех свободных переменных которой $x_1, x_2, \dots, x_l$.

83. Привести к предваренной нормальной форме

(а) $\forall x B(x) \supset \exists y(A(y) \supset B(x))$;
(б) $\forall x(\neg A(x) \supset \exists y B(y)) \supset B(y) \vee A(x)$;
(в) $(\forall x B(x) \supset \exists x A(x)) \,\&\, (A(y) \supset \exists y C(y)) \supset (A(x) \supset C(y))$;
(г) $\forall x(A(x) \supset B(y)) \,\&\, \forall y(A(x) \supset (B(y) \supset C(z)) \supset \exists z(A(x) \supset C(z))$.